TENTAMEN ALGEBRA, 2 FEBRUARI 2004, 9:00 – 12:00

Schrijf op elk in te leveren blad je naam, en op het eerste blad ook het aantal ingeleverde bladen.

(1) (3 pt) Geef een natuurlijk getal n zodat de groep A_n van alle even permutaties op n elementen een permutatie van orde 28 bevat.

(2) (3pt) De hoekpunten $P_n := (\cos 2\pi n/6, \sin 2\pi n/6)$ van een regelmatige zeshoek geven we twee kleuren: rood als n even is, en blauw als n oneven is. Leg uit dat ieder element van de symmetriegroep D_6 van deze zeshoek, een permutatie van deze twee kleuren levert. Zo krijg je dus een homomorfisme $\varphi : D_6 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Bepaal het beeld $\varphi(\sigma)$ van elk van de twaalf elementen van $\sigma \in D_6$.

(3) (3pt) Bedenk twee verschillende homomorfismen van D_5 naar de vermenigvuldiggroep $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$.

(4) (3pt) De letter 'T' is een graaf met 4 punten en 3 lijnstukken. Wat is de symmetriegroep van deze graaf?

(5) (3pt) De quaternionengroep $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ heeft zoals bekend als vermenigvuldiging $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$, enzovoort. Ga na dat elke ondergroep van G een normaaldeler van G is.

(6) (3pt) G is de vermenigvuldiggroep van alle inverteerbare reële 2×2 matrices. N is de normaaldeler in G bestaande uit alle matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ voor $a \neq 0$. Verder is $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in G$. Wat is de orde van gN in de factorgroep G/N?

(7) (3pt) Hoeveel Sylow 5-groepen (dat zijn in dit geval ondergroepen bestaande uit 5 elementen) bevat S_5?

(8) (3pt) Gegeven een groep G. De deelverzameling $H \subset G$ bestaat per definitie uit alle producten

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1},$$

waarbij $n = 1, 2, 3, \ldots$ en alle $a_i, b_i \in G$. Laat zien dat H een ondergroep van G is. Ga na dat voor $a, b, g \in G$ geldt

$$gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1}$$

en toon hiermee aan dat H zelfs een normaaldeler is in G.

(9) (3pt) Laat, voor een willekeurige groep G, H de normaaldeler in G zijn die in de vorige opgave is gedefinieerd. Toon aan dat G/H een commutatieve groep is.